NOTA	
-------------	--

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA:

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones: • **NO HAY CONSULTAS.**

- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

- 1) a) [10 pts.] Factorizar completamente la siguiente expresión.

$$E = \frac{\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) \cdot \frac{xy}{x+y}}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy}}$$

- b) [10 pts.] Racionalizar el denominador de la siguiente expresión.

$$F = \frac{3}{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}$$

DESARROLLO

$$\text{a) } \frac{\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) \cdot \frac{xy}{x+y}}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy}} = \frac{\left(\frac{x^3+y^3}{\cancel{xy}}\right) \cdot \frac{\cancel{xy}}{x+y}}{\frac{x^2-xy+y^2}{x^2y^2}} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)x^2y^2}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} = x^2y^2$$

(3 pts. las primeras 3 igualdades + 1 pto. resultado final)

$$\text{b) } \frac{3}{\sqrt{3 - \sqrt{3}}} = \frac{3}{\sqrt{3 - \sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{\sqrt{3 - \sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3 - \sqrt{3}}(3 + \sqrt{3})}{6}$$

(5 pts. por cada una de las racionalizaciones involucradas)

2) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) [10 pts.]

$$\frac{x}{x-2} - \frac{6}{(x-2)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)} = \frac{x-5}{x^2-4x-5}$$

b) [10 pts.]

$$x - \sqrt{2-x} = 0$$

DESARROLLO

a) Factorizando y simplificando nos queda:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{6}{(x-2)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)} = \frac{\cancel{x-5}}{(x+1)\cancel{(x-5)}}$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{6}{(x-2)(x+1)} + \frac{1}{\cancel{(x+1)}} = \frac{1}{\cancel{(x+1)}}$$

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x-2}} = \frac{6}{\cancel{(x-2)}(x+1)}$$

$$x(x+1) = 6$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

Finalmente sólo $x = -3$ es solución.

(6 pts. por llegar a la cuadráticas, 2 por resolver la cuadrática + 2 por eliminar la solución $x = 2$)

b) Nos queda

$$x = \sqrt{2-x}$$

$$x^2 = 2-x$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

Finalmente la única solución es $x = 1$.

(6 pts. por llegar a la cuadráticas, 2 por resolver la cuadrática + 2 por eliminar la solución $x = 2$)

3) Se sabe que $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ y que $\csc(\beta) = \frac{13}{5}$.

a) [10 pts.] Determine el valor de la expresión

$$E = \cos^2(\alpha) - \tan(\beta) \cdot \csc(\alpha) + \sin^2(\alpha)$$

b) [10 pts.] Un topógrafo usa un instrumento llamado teodolito para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso y la cumbre de una montaña. En un punto, se mide un ángulo de elevación de α . Medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de β . ¿Qué altura tiene la montaña?

DESARROLLO

a) Completando los triángulos correspondientes a α y a β podemos obtener que $\tan(\beta) = \frac{5}{12}$ y $\csc(\alpha) = \frac{5}{3}$. Además $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. (5 pts.)
Ahora si reemplazamos estos valores en la expresión obtenemos que:

$$E = 1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{3} = \frac{11}{36}$$

(5 pts.)

b) Depende del planteo de las variables en el ejercicio. Si llamamos h la altura de la montaña, y x la distancia inicial del topógrafo a la base (perpendicular) a la montaña obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\blacksquare \tan(\alpha) = \frac{h}{x}$$

$$\blacksquare \tan(\beta) = \frac{h}{x + 500}$$

(2 pts. cada ecuación) Ahora si reemplazamos los valores de $\tan(\alpha)$ y $\tan(\beta)$ en base a los datos iniciales y resolvemos el sistema obtenemos que la altura es $h = \frac{7500}{16}$

(3 pts. si tiene errores pequeños + 3 pts. por respuesta correcta)